

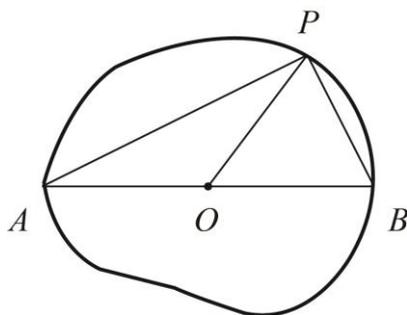
34 拋向空中的繩環遊戲…玩弄圓與橢圓於股掌之中

看過韻律體操表演嗎？女韻律體操選手將繩、球、帶、環或棒拋向空中，進行各種動作的表演，實在精彩。對學數學的人來說，除了這些東西在空中所走的路徑是拋物線外，不知道還有怎樣深刻的發現。我們以繩環為例，看看你對拋向空中的繩環有何數學發現：



韻律體操選手將一長度為 $4a$ 的繩環拋向空中，是否任何時刻都可以在空中畫一個半徑為 a 的球，讓整個繩環完全落在球的內部或者球面上？〔這裡的「繩環」是指將長 $4a$ 的繩子頭尾相接所形成的環狀繩子〕

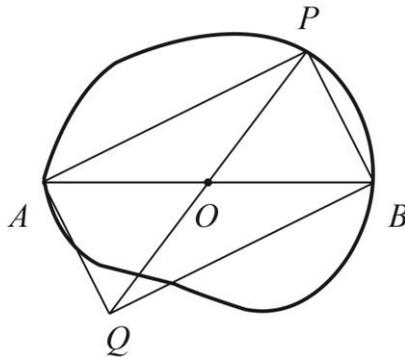
我們在繩環任取一點 A ，接著取另一點 B 使得兩點將繩環等分，即沿著繩子從 A 到 B 的長度恰好是 $2a$ ，如下圖所示：



令 P 是繩環上的任一點，連接三角形 PAB ，且令 O 為 \overline{AB} 的中點。與繩環的長度相比，可以得到不等式

$$\overline{PA} + \overline{PB} \leq 2a.$$

設 Q 是 P 對 O 點的對稱點，即 O 是 \overline{PQ} 的中點，此時四邊形 $PAQB$ 為平行四邊形，如下圖所示：



利用三角不等式 $\overline{PA} + \overline{QA} \geq \overline{PQ}$ 及 $\overline{QA} = \overline{PB}, \overline{PQ} = 2\overline{PO}$ ，得

$$\overline{PA} + \overline{PB} \geq 2\overline{PO}.$$

綜合上述兩個不等式，得

$$\overline{PO} \leq a.$$

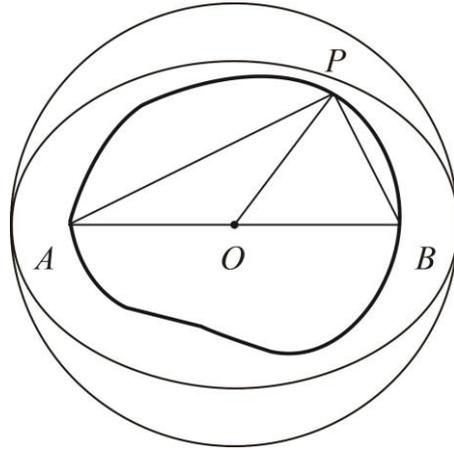
這不等式告訴我們：繩環上任一點 P 至固定點 O 的距離不超過 a ，也就是說，整個繩環落在以 O 點為球心，半徑為 a 的球內。

上述的解法是利用圓（或球）的知識解題，接下來我們使用橢圓的定義來處理：不等式

$$\overline{PA} + \overline{PB} \leq 2a$$

啟發我們考慮以 A 及 B 為焦點，半長軸 a 的橢圓 Γ ，即橢圓 Γ 是平面上到 A, B 兩點之距離和為 $2a$ 的點所成的圖形。這不等式告訴我們：繩環上任一點 P 都落在橢圓 Γ 的內部。

又因為橢圓的半短軸不超過半長軸，所以橢圓 Γ 落在以 \overline{AB} 中點 O 為圓心，半徑 a 的圓內部，如下圖所示：



事實上，我們甚至可以證明：這個繩環會落在對角線為 $2a$ 的正立方體內。